**COLEGIUL NAŢIONAL**
**„VASILE LUCACIU"**
**BAIA MARE**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

**Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"**
**ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019**

**CLASA a XI-a**

**Subiectul 1.**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

**a)** Determinați matricele $B$ și $C$, care verifică relațiile $A = -2B + C$ și $A^2 = 4B - 4C$.

**b)** Demonstrați că există două șiruri de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot B + y_n \cdot C$, pentru orice număr natural $n \geq 1$, unde $B$ și $C$ sunt matricele determinate la punctul anterior.

**c)** Calculați $A^n$ pentru orice număr natural $n \geq 1$.

**Subiectul 2.**

**a)** Arătați că, dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifică relația $Tr(X \cdot X^t) = 0$, atunci $X = O_n$.

**b)** Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care îndeplinesc condiția
$Tr(A \cdot A^t) + Tr(B \cdot B^t) = Tr(A \cdot B) + Tr(A^t \cdot B^t)$.
Demonstrați că $B^t = A$.
Prin $X^t$ s-a notat transpusa matricei $X$, iar $Tr(X)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $X$.

**Subiectul 3.**

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ care îndeplinesc relaţiile

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_{n+1} \geq \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \text{ și } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Demonstrați că șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ au limite și limitele sunt egale.

**Subiectul 4.**

Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[a \cdot A_n^1]}{n^2} + \frac{[2a \cdot A_n^2]}{n^3} + \frac{[3a \cdot A_n^3]}{n^4} + \cdots + \frac{[na \cdot A_n^n]}{n^{n+1}}\right)$$

unde $a \geq 0$ și $A_n^k$ reprezintă aranjamente de $n$ luate câte $k$, iar $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $\alpha$.

Notă:
1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

**Concursul "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"**
**ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019**
**BAREM DE CORECTARE CLASA a XI-a**

**Subiectul 1.**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

**a)** Determinați matricele $B$ și $C$, care verifică relațiile $A = -2B + C$ și $A^2 = 4B - 4C$.

**b)** Demonstrați că există două șiruri de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $A^n = x_n \cdot B + y_n \cdot C$, pentru orice număr natural $n \geq 1$, unde $B$ și $C$ sunt matricele determinate la punctul anterior.

**c)** Calculați $A^n$ pentru orice număr natural $n \geq 1$.

**Soluție.**

**a)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ........................................ **1p**

**b)** Inducție matematică: Presupunem $A^n = x_n \cdot B + y_n \cdot C \Rightarrow A^{n+1} = x_n \cdot AB + y_n \cdot AC \Rightarrow$
$A^{n+1} = x_n \cdot (-2B + C)B + y_n \cdot (-2B + C)C \Rightarrow A^{n+1} = x_n \cdot (-2B + C) + y_n \cdot (-2C) \Rightarrow$
$A^{n+1} = -2x_n \cdot B + (x_n - 2y_n) \cdot C$ ........................................ **2p**
Considerăm șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = -2, y_1 = 1, x_{n+1} = -2x_n$ și $y_{n+1} = x_n - 2y_n$.... **1p**

**c)** $(x_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică $\Rightarrow x_n = (-2)^n$ ........................................ **1p**
$y_{n+1} = (-2)^n - 2y_n$ și dacă notăm $z_n = \frac{y_n}{(-2)^{n-1}} \Rightarrow z_{n+1} = 1 + z_n \Rightarrow z_n = n$.......................... **1p**
$y_n = (-2)^{n-1} \cdot n \Rightarrow A^n = (-2)^n \cdot B + (-2)^{n-1} \cdot n \cdot C$ ........................................ **1p**

**Subiectul 2.**

**a)** Arătați că, dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifică relația $Tr(X \cdot X^t) = 0$, atunci $X = O_n$.

**b)** Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care îndeplinesc condiția
$Tr(A \cdot A^t) + Tr(B \cdot B^t) = Tr(A \cdot B) + Tr(A^t \cdot B^t)$.
Demonstrați că $B^t = A$.
Prin $X^t$ s-a notat transpusa matricei $X$, iar $Tr(X)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $X$.

**Soluție.**

**a)** Fie $X = (x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$. Avem $Tr(X \cdot X^t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2$

$Tr(X \cdot X^t) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = 0$, $x_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow x_{ij} = 0, \forall i, j \in \{1,2,\dots,n\} \Rightarrow X = O_n$ … …**2p**

**b)**
$(A - B^t)(A - B^t)^t = (A - B^t)(A^t - B) = AA^t - AB - B^tA^t + B^tB$ … … … … … … … … … ….**2p**
$Tr(AA^t - AB - B^tA^t + B^tB) = Tr(AA^t) - Tr(A \cdot B) - Tr(B^tA^t) + Tr(B^t \cdot B) =$
$Tr(AA^t) + Tr(B \cdot B^t) - Tr(A \cdot B) - Tr(A^t \cdot B^t) = 0$ … … … … … … … … … … … … … … … … **2p**
$Tr\left((A - B^t)(A - B^t)^t\right) = 0 \Rightarrow A - B^t = O_n$ … … … … … … … … … … … … … … … … … ..**1p**

**Subiectul 3.**

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ care îndeplinesc relațiile

$$a_1 > 0, b_1 > 0, a_{n+1} \geq \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \text{ și } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Demonstrați că șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$ au limite și limitele sunt egale.

**Soluție.**

Prin inducție matematică se demonstrează că: $a_n > 0, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ..................................1p

$$a_{n+1} - b_{n+1} \geq \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \geq 0 \Longrightarrow a_n \geq b_n, \forall n \geq 2 \text{ ............... } \mathbf{2p}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \geq 0 \Longrightarrow (b_n)_{n\geq 2} \text{ crescător } \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} b_n = l \text{ ............... } \mathbf{2p}$$

Dacă $l = \infty$ și cum $a_n \geq b_n$ atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ..........................................................................................1p

Dacă $l \in \mathbb{R}$, atunci cum $a_n = 2b_{n+1} - b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2l - l = l$ ........................................ 1p

**Subiectul 4.**

Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[a\cdot A_n^1]}{n^2} + \frac{[2a\cdot A_n^2]}{n^3} + \frac{[3a\cdot A_n^3]}{n^4} + \cdots + \frac{[na\cdot A_n^n]}{n^{n+1}}\right)$$

unde $a \geq 0$ și $A_n^k$ reprezintă aranjamente de $n$ luate câte $k$, iar $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $\alpha$.

**Soluție.**

Avem $kaA_n^k - 1 < [kaA_n^k] \leq kaA_n^k$ .......................................................................................1p

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{kaA_n^k - 1}{n^{k+1}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{[kaA_n^k]}{n^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{kaA_n^k}{n^{k+1}} \qquad (\mathbf{1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{kA_n^k}{n^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot n!}{n^{k+1}\cdot(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\big(n-(n-k)\big)\cdot n!}{n^{k+1}\cdot(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n\cdot n!}{n^{k+1}\cdot(n-k)!} - \frac{(n-k)\cdot n!}{n^{k+1}\cdot(n-k)!}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{A_n^k}{n^k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_n^{k+1}}{n^{k+1}} = \frac{A_n^1}{n} = 1 \text{ ............................................ } \mathbf{3p}$$

Înlocuind în relația **(1)** obținem

$$a - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{[kaA_n^k]}{n^{k+1}} \leq a \text{ ............................................ } \mathbf{1p}$$

Din criteriul cleștelui obținem $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[a\cdot A_n^1]}{n^2} + \frac{[a\cdot A_n^2]}{n^3} + \frac{[a\cdot A_n^3]}{n^4} + \cdots + \frac{[a\cdot A_n^n]}{n^{n+1}}\right) = a$ .........................2p

COLEGIUL NAȚIONAL VASILE LUCACIU

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro